ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THÀNH AN

BÀI TOÁN VỀ CHIA HÌNH VUÔNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

Mục lục

Lời cảm ơn

Trước tiên, tác giả xin được gửi lời cảm ơn đến tất cả quý thầy cô đã giảng dạy trong chương trình Cao học khóa 2013-2015 lớp K7Q, chuyên ngành Phương pháp toán sơ cấp, sự quan tâm chỉ đạo, tạo điều kiện của Ban giám hiệu, các phòng, khoa chuyên môn của trường Đại học Khoa học- Đại học Thái Nguyên, các kiến thức được thầy cô giảng dạy làm cơ sở cho tác giả thực hiện tốt luận văn này.

Tác giả xin chân thành cảm ơn TS.Nguyễn Văn Minh, đã tận tình hướng dẫn cho tác giả trong thời gian thực hiện luận văn. Mặc dù, trong quá trình thực hiện luận văn, có giai đoạn không được thuận lợi mang yếu tố chủ quan nhưng thầy đã rất cố gắng hướng dẫn, chỉ bảo, cho tác giả nhiều kiến thức cũng như kinh nghiệm trong thời gian thực hiện đề tài. Sau cùng, tác giả xin gửi lời biết ơn sâu sắc đến Ban giám hiệu trường THPT Hoàng Hoa Thám- Đông Triều- Quảng Ninh, các anh chị em đồng nghiệp và gia đình, đã luôn tạo điều kiện tốt nhất cho tôi trong suốt quá trình học tập cũng như thực hiện luận văn.

Luận văn này được thực hiện và hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2015

Phạm Thành An

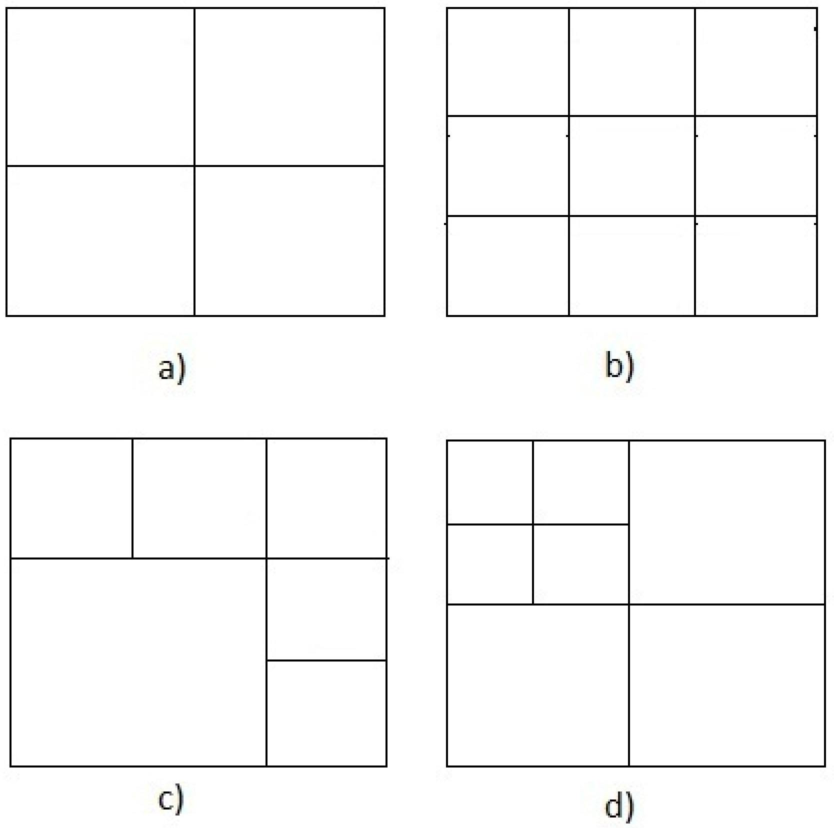
Học viên Cao học Toán K7Q

Trường ĐH Khoa học - ĐH Thái Nguyên

Mở đầu

Luận văn trình bày bài toán nổi tiếng: "Chia hình vuông K thành một số hình vuông nhỏ hơn". Vấn đề trở thành dễ dàng nếu không đòi hỏi cách chia các hình vuông con phải khác nhau từng đôi (hình 1).

- Nếu yêu cầu tất cả các hình vuông con phải bằng nhau thì chia được như hình 1a,b, nghĩa là số hình vuông phải là chính phương.
- Nếu không yêu cầu tất cả các hình vuông bằng nhau, thì số hình vuông có thể là 6 (hình 1c) hoặc 7 (hình 1d).



Hình 1:

Tuy nhiên nếu yêu cầu "các hình vuông khác nhau từng đôi một" thì vấn đề sẽ không đơn giản. Một điều thú vị, từ bài toán chia hình vuông là biến thành một mạch điện tương đương, bằng cách xem xét các ô vuông như điện trở nối với các cạnh trên cùng và cạnh dưới cùng của hình vuông lớn, sau đó áp dụng định luật về mạch của định luật Kirchhoff mà sẽ đề cập trong luận văn này để giải quyết bài toán trên.

Luận văn đề cập đến hai khái niệm Đồ thị và Mạch điện, dựa vào lý thuyết đồ thị để giải bài toán chia hình chữ nhật thành các hình vuông không bằng nhau, đặc biệt là Định lý Euler "Số đỉnh trừ số cạnh cộng số diện trong mọi đồ thị luôn bằng 1", khi đó ta thấy một song ánh hiếm hoi giữa Hình học và Điện học. Hơn nữa, việc chứng minh Định lý cơ bản về chia hình chữ nhật thành các hình vuông không bằng nhau thì mọi hình vuông đều chia được thành các hình vuông nhỏ hơn đôi một khác nhau. Bài toán về ghép các hình vuông để được hình chữ nhật cho ta thấy sự liên hệ của bài toán này với dãy số Fibonacci. Cấu trúc luận văn:

Chương 1: Ghép hình chữ nhật từ các hình vuông: Giải quyết bài toán về chia hình chữ nhật thành các hình vuông khác nhau từng đôi và ghép hình chữ nhật từ các hình vuông khác nhau từng đôi.

Chương 2: Định lý cơ bản về chia hình chữ nhật thành các hình vuông không bằng nhau: Phát biểu và chứng minh lại Định lý cơ bản về điều kiện cần và đủ của phép chia hình chữ nhật thành các hình vuông không bằng nhau, tìm được một hệ thức liên hệ giữa bài toán chia một hình chữ nhật thành các hình vuông với dãy Fibonacci đã biết.

Thái Nguyên, tháng 04 năm 2015

Phạm Thành An
Học viên Cao học Toán K7Q
Chuyên ngành Phương pháp Toán sơ cấp
Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên
Email: Phamthanhan.c3hht@quangninh.edu.vn

Chương 1

Ghép hình chữ nhật từ các hình vuông

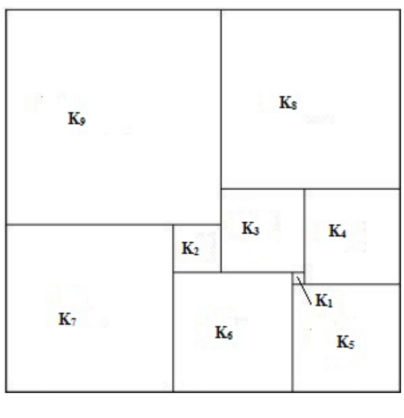
1.1 Ghép hình chữ nhật từ các hình vuông

Trong mục này ta xét bài toán sau:

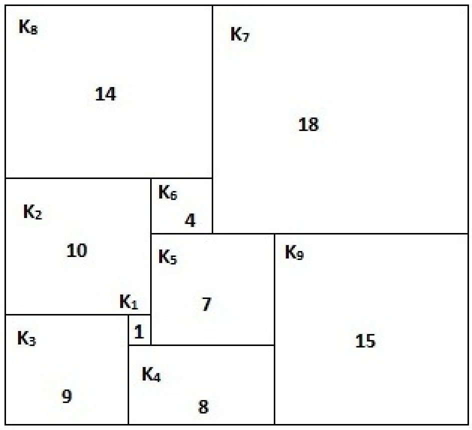
Bài toán: Chia một hình chữ nhật thành n hình vuông con khác nhau từng đôi.

Liên quan đến bài toán này là bài toán : "Ghép n hình vuông khác nhau từng đôi thành một hình chữ nhật".

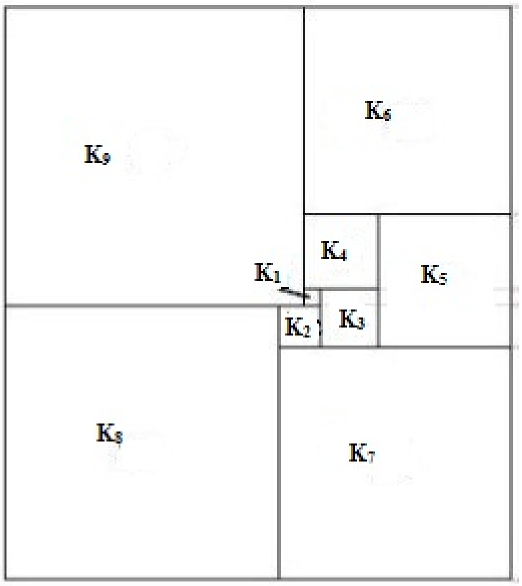
Người ta đã chứng minh được rằng, không thể ghép n hình vuông khác nhau từng đôi để được một hình chữ nhật với $n \leq 8$ (chi tiết xem [5]). Với $n = 9$, có thể ghép 9 hình vuông khác nhau từng đôi thành một hình chữ nhật được minh họa trên hình (1.1, 1.2, 1.3, 1.4).



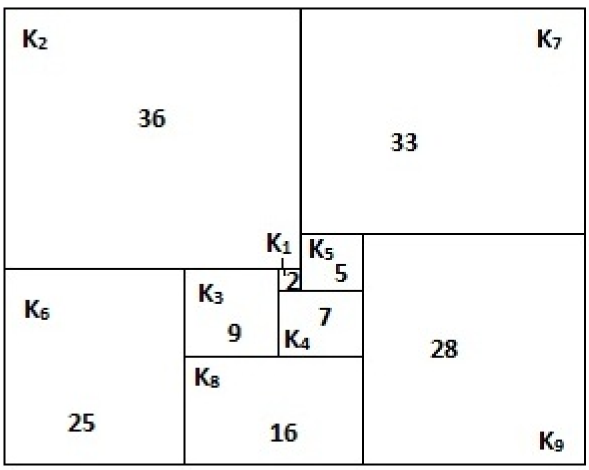
Hình 1.1:



Hình 1.2:



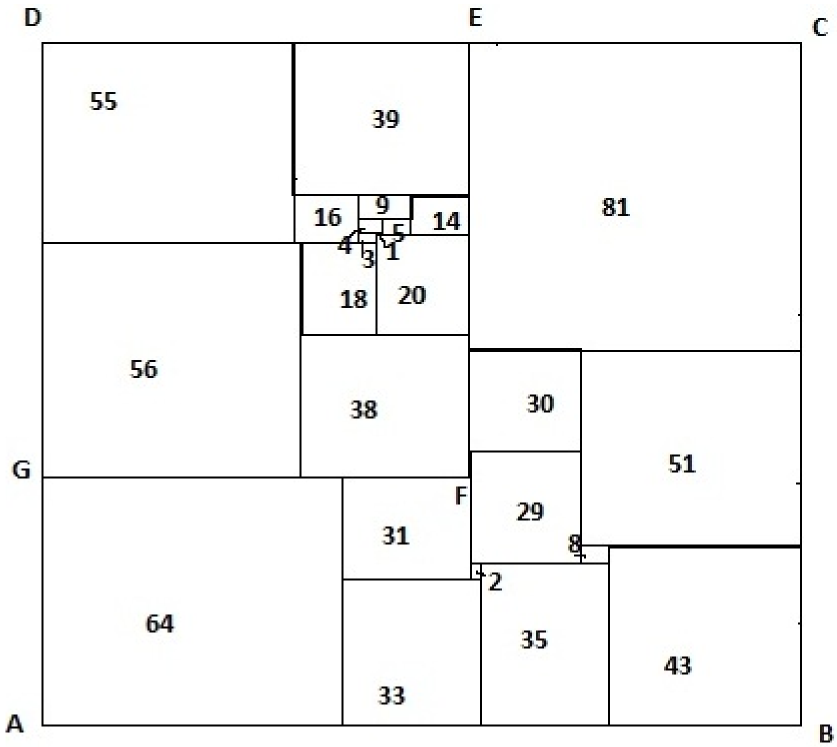
Hình 1.3:



Hình 1.4:

Dễ thấy, nếu ta có thể ghép n hình vuông khác nhau từng đôi để được một hình chữ nhật thì cũng có thể ghép $n+1$ hình vuông khác nhau từng đôi để được một hình chữ nhật. Thật vậy, nếu hình chữ nhật P được ghép từ n hình vuông khác nhau từng đôi, bằng cách ghép thêm vào P một hình vuông có cạnh bằng cạnh lớn của P, ta sẽ được một hình chữ nhật P_1. Hình vuông thứ $n+1$ có cạnh lớn hơn tất cả các cạnh của hình vuông hợp thành P. Như vậy, hình vuông P_1 được ghép từ $n+1$ hình vuông khác nhau từng đôi.

Một số nhà toán học đã xét bài toán: Tìm số n bé nhất sao cho có thể chia một hình vuông có kích thước cho trước thành n hình vuông con khác nhau từng đôi. Người đầu tiên xét bài toán này là P Sprag vào năm 1939 [6]. Trên hình 1.5 chỉ ra một cách chia hình vuông cạnh 175 thành 24 hình vuông con khác nhau từng đôi với các cạnh như sau:

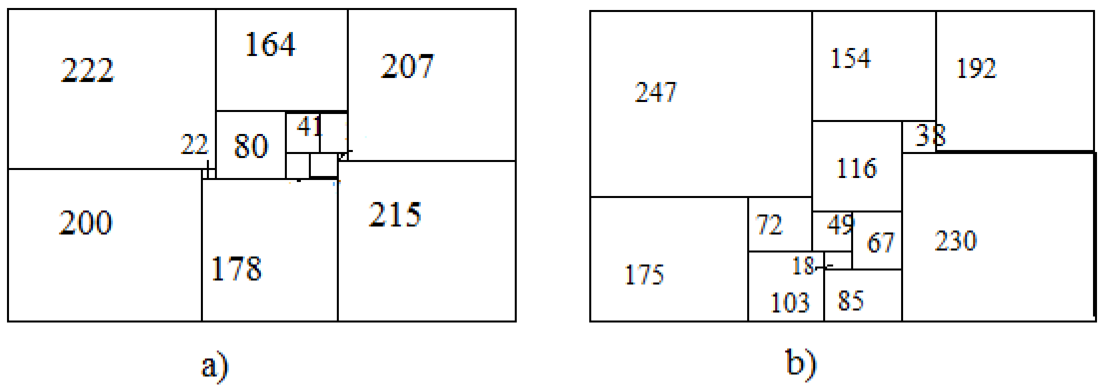


Hình 1.5:

$$1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 14, 16, 18, 20, 29, 30$$

$$31, 33, 35, 38, 39, 43, 51, 55, 56, 64, 81$$

Ví dụ này được chỉ ra bởi Willcocks T.H.A.[8]. Cho đến nay, 24 là số ít nhất các hình vuông khác nhau từng đôi mà có thể ghép thành một hình vuông có cạnh 175. Ví dụ cho sự phân hoạch hình chữ nhật có kích thước 422×593 thành các hình vuông con khác nhau từng đôi (1.6):

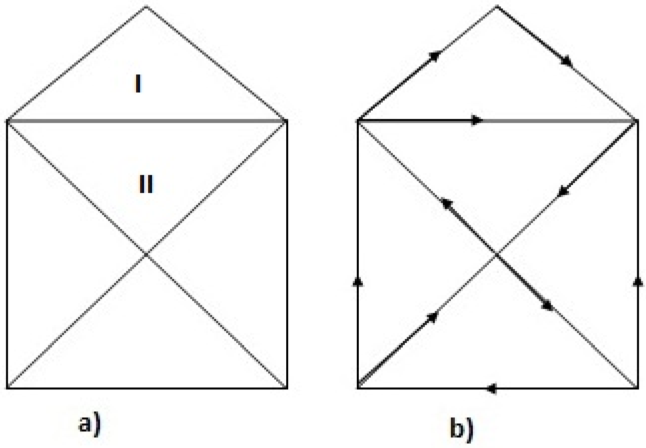


Hình 1.6:

Các kết quả đã kể trên về bài toán chia hình chữ nhật thành các hình vuông con khác nhau từng đôi liên quan đến hai khái niệm quan trọng là khái niệm đồ thị và khái niệm mạch điện.

1.2 Đồ thị và mạch điện

Các phương pháp đã sử dụng để nhận được đa số các kết quả trong 1.1 liên quan đến cơ sở của lý thuyết đồ thị và phương pháp biểu diễn các mạng điện phức tạp. Đồ thị trên mặt phẳng là một hệ thống các đường, ví dụ các đoạn thẳng, nối các điểm của một hệ điểm đã cho nào đó. Các điểm này gọi là các đỉnh của đồ thị, còn các đường (các đoạn thẳng) nối các điểm này gọi là các cạnh của đồ thị. Phần mặt phẳng giới hạn bởi các đường gấp khúc khép kín (nói chung, là các đường cong) lập từ các cạnh của đồ thị, tương tự như miền I hoặc miền II của hình 1.7a gọi là các diện của đồ thị.



Hình 1.7:

Định lý sau đây kết quả quan trọng của lý thuyết đồ thị:

Định lý 1.1 (Định lý Euler)**.** *[5] Nếu đồ thị có B đỉnh, P cạnh và G diện thì các số nguyên dương B, P, G liên hệ với nhau bởi hệ thức:*

$$B - P + G = 1 \quad (E)$$

Chẳng hạn, đối với đồ thị trên hình 1.7a ta có : $B = 6$, $P = 10$, $G = 5$ và $6 - 10 + 5 = 1$. Cuối cùng, cần nói thêm rằng đồ thị mà cạnh của nó kèm theo các mũi tên chỉ hướng đi của các cạnh này (ví dụ, xem hình 1.7b) được gọi là các đồ thị định hướng.

Giả sử ta có một phân hoạch nào đó một hình chữ nhật hay một hình vuông thành các hình vuông nhỏ hơn; để xác định ta sẽ nói về phân hoạch hình chữ nhật với các cạnh 32 và 33 thành 9 hình vuông khác nhau từng đôi biểu diễn trên hình 1.2, mặc dù ở đây đang nói về phân hoạch bất kỳ một hình chữ nhật thành các hình vuông con không nhất thiết phải khác nhau. Như thường lệ, ta sẽ xem các cạnh của hình chữ nhật là nằm ngang hoặc thẳng đứng; khi đó các cạnh của tất cả các hình vuông con cũng sẽ nằm ngang hoặc thẳng đứng. Ta xét tất cả các đoạn nằm ngang trên hình vẽ của ta, tức là các đoạn $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, A_5B_5, A_6B_6$ (hình 1.8)